Aprendizajes esperados

- Utilizar árboles y triángulo de Pascal en la resolución de problemas.
- Aplicar el concepto de probabilidad total.
- Aplicar el concepto de probabilidad condicionada.
- Aplicar el concepto de probabilidad compuesta.

Pregunta oficial PSU

56. Del triángulo de Pascal de la figura 17 se puede inferir el número total de los posibles resultados que se obtienen al lanzar una moneda hasta seis veces, en forma aleatoria. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdaderas?

I) De la fila 1 2 1 se deduce que, si la moneda se lanza dos veces, teóricamente sólo en dos de los posibles resultados se obtiene una cara y un sello.

II) De la fila 1 3 3 1 se deduce que, si la moneda se lanza tres veces, teóricamente solo se pueden obtener ocho posibles resultados distintos.

III) De la fila 1 6 15 20 15 6 1 se deduce que, si la moneda se lanza seis veces, teóricamente en quince de los resultados posibles se obtiene cuatro caras y dos sellos.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

fig. 17

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

*Fuente : **DEMRE - U. DE CHILE**, Proceso de admisión 2011.*

1. Diagrama de árbol
2. Triángulo de Pascal
3. Leyes de probabilidad

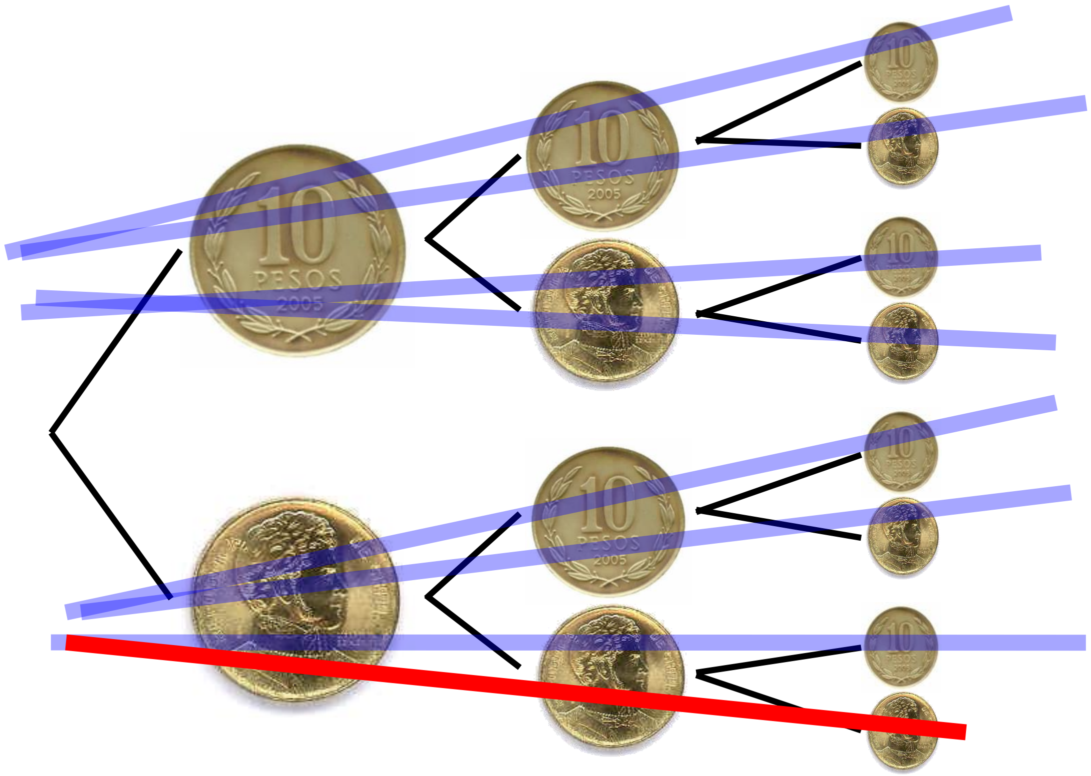
1. Diagrama de árbol

En algunos casos, para calcular la probabilidad son muy útiles los diagramas de árbol cuyas ramas nos indican las distintas posibilidades que pueden existir.

Ejemplo: Al lanzar tres monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener a lo más 2 caras?

Solución:

Al realizar un diagrama de árbol para entender las posibilidades tenemos:



1. Diagrama de árbol

Existen **8** formas distintas, **casos posibles**, en que pueden caer 3 monedas.

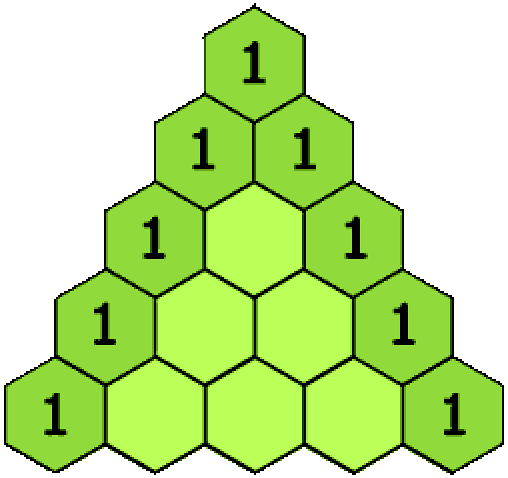
La frase **a lo más** significa menor o igual que. Por lo tanto, el evento buscado es que salgan 0, 1 o 2 caras.

El evento tiene **7 casos favorables**, luego su probabilidad es:

$$P(\text{a lo más 2 caras}) = \frac{7}{8}$$

2. Triángulo de Pascal

El **triángulo de Pascal** es un conjunto infinito de números enteros ordenados en forma de **triángulo** que expresan coeficientes binomiales. En probabilidades el **Triángulo de Pascal** se utiliza como una técnica de conteo en la resolución de problemas de iteración de experimentos sencillos, cuando el objeto considerado tiene dos posibilidades, por ejemplo una moneda, sexo de un hijo por nacer, etc.



Cada número es la suma de los dos números que están sobre él.

2. Triángulo de Pascal

Por ejemplo:

Si se lanza una moneda **una vez**, los casos posibles son:
1 cara (c) o 1 sello (s), que está representado en la primera fila del Triángulo de Pascal:

1 1

El total de casos posibles es 2.

Si se lanza una moneda **dos veces**, los casos posibles son:
CC, CS, SC, SS, lo que implica que se tiene 1 caso en que aparecen dos caras, 2 casos distintos en que se obtiene una cara y un sello, y 1 caso en que se obtienen dos sellos, que está representado en la segunda fila del Triángulo de Pascal:

1 2 1

El total de casos posibles es 4.

3. Leyes de probabilidad

3.1 Ley de probabilidad total

Eventos: **MUTUAMENTE EXCLUYENTES**

Cuando **A** y **B** son eventos en que si ocurre uno el otro no puede ocurrir, entonces la probabilidad está dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Donde **A U B** representa la suma de los elementos que cumplen alguna de las condiciones de los sucesos.

Los ejercicios de ley de probabilidad total es posible identificarlos, ya que aparece una “o” en el enunciado.

3. Leyes de probabilidad

3.1 Ley de probabilidad total

Ejemplo: Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 2 o mayor que 5?

Solución:

$$P(\text{ número menor que 2}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{número mayor que 5}) = \frac{1}{6}$$

Luego, se observa que **NO** se repite ningún elemento. Desarrollando:

$$\begin{aligned} P((<2) \text{ o } (>5)) &= P((<2) \cup (>5)) \\ &= P(<2) + P(>5) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Leyes de probabilidad

3.1 Ley de probabilidad total

Eventos: **NO MUTUAMENTE EXCLUYENTES**

Cuando **A** y **B** son eventos en que pueden ocurrir al mismo tiempo, entonces la probabilidad está dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Donde **A ∩ B** representa la cantidad de elementos comunes entre los sucesos.

Los ejercicios de ley de probabilidad total es posible identificarlos, ya que aparece una “o” en el enunciado.

3. Leyes de probabilidad

3.1 Ley de probabilidad total

Ejemplo: Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 5 o un número par?

Solución:

P(número menor que 5) = $\frac{4}{6}$

P(número par) = $\frac{3}{6}$

Luego, se observa que se repiten dos elementos {2, 4}, por lo tanto se debe restar $\frac{2}{6}$ que corresponde a la intersección. Desarrollando:

$$P((<5) \text{ o } (\text{par})) = P(<5) + P(\text{par}) - P((<5) \cap (\text{par}))$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

3. Leyes de probabilidad

3.2 Ley de probabilidad condicionada

Se llama probabilidad de ***B*** condicionada a ***A***, a la probabilidad de ***B*** tomando el espacio muestral de ***A***. Es decir, se calcula la probabilidad de ***B*** dado que ya ocurrió un evento ***A***. Se calcula:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

El valor de P(A) dependerá si en el experimento hay o no reposición de elementos.

3. Leyes de probabilidad

3.2 Ley de probabilidad condicionada

Ejemplo: Una urna contiene 3 bolitas rojas numeradas del 1 al 3 y 6 bolitas amarillas numeradas del 1 al 6. Al extraer una bolita al azar resultó ser un número par, ¿cuál es la probabilidad que la bolita sea roja?

Solución:

$$\text{P(par color rojo)} = \frac{1}{9}$$

$$\text{P(par color amarillo)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{P(par de cualquier color)} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\text{P(roja/número par)} = \frac{\text{P(par y roja)}}{\text{P(par)}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}$$

3. Leyes de probabilidad

3.3 Ley de probabilidad compuesta

Eventos: **Independientes**

Cuando **A** y **B** son eventos en que la ocurrencia de uno **NO** afecta la ocurrencia del otro, entonces la probabilidad está dada por:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Los ejercicios de ley de probabilidad compuesta es posible identificarlos, ya que, en muchos casos, aparece una “y” en el enunciado.

3. Leyes de probabilidad

3.3 Ley de probabilidad compuesta

Ejemplo 1: ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos veces un dado se obtengan dos números pares?

Solución:

P(número par) = $\frac{3}{6}$

Si en el primer lanzamiento sale número par, esto no influye en que en el segundo lanzamiento salga número par, por lo tanto son independientes.

$$P(\text{par y par}) = P(\text{par}) \cdot P(\text{par})$$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{4}$$

3. Leyes de probabilidad

3.3 Ley de probabilidad compuesta

Ejemplo 2: Se tiene una bolsa con 30 bolitas entre blancas y rojas, de las cuales 12 son blancas, todas de igual peso y tamaño. Si se extraen 2 bolitas al azar, con reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

Solución:

P(pelota blanca) = $\frac{12}{30}$

Si en la primera extracción sale una bolita blanca, al extraer la segunda bolita no influye en su probabilidad, ya que se repone a la bolsa. Por lo tanto, son independientes.

$$\begin{aligned}
\text{P(blanca) y P(blanca)} &= \text{P(blanca)} \cdot \text{P(blanca)} \\
&= \frac{12}{30} \cdot \frac{12}{30} \\
&= \frac{4}{25}
\end{aligned}$$

3. Leyes de probabilidad

3.3 Ley de probabilidad compuesta

Eventos: **Dependientes**

Cuando **A** y **B** son eventos en que la ocurrencia de uno afecta la ocurrencia del otro, entonces la probabilidad está dada por:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Donde **B/A** representa que el evento B ocurre después de haber ocurrido el evento A, es decir varían los casos posibles y favorables del evento B.

Los ejercicios de ley de probabilidad compuesta es posible identificarlos, ya que, en muchos casos, aparece una "y" en el enunciado.

3.3 Ley de probabilidad compuesta

Ejemplo 1: Se tiene una bolsa con 30 bolitas entre blancas y rojas, de las cuales 12 son blancas, todas de igual peso y tamaño. Si se extraen 2 bolitas al azar, sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

Solución:

Si en la primera extracción sale una bolita blanca, al extraer la segunda los casos favorables y posibles varían, ya que hay una bolita menos.

$$P(\text{ pelota blanca primera extracción}) = \frac{12}{30}$$

$$P(\text{ pelota blanca segunda extracción}) = \frac{11}{29}$$

$$\begin{aligned} P(\text{blanca}) \text{ y } P(\text{blanca}) &= P(\text{blanca}) \cdot P(\text{blanca/blanca}) \\ &= \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} \\ &= \frac{22}{145} \end{aligned}$$

3. Leyes de probabilidad

3.3 Ley de probabilidad compuesta

Ejemplo 2: Se tiene una jaula con 8 pájaros amarillos y 6 celestes. Si se escapan dos pájaros de la jaula, ¿cuál es la probabilidad de que el primero sea amarillo y el segundo sea celeste?

Solución:

Si se escapa un pájaro, al escaparse el segundo ya hay menos pájaros en la jaula, por lo tanto sí afecta la probabilidad del segundo.

$$P\text{ (pájaro amarillo)} = \frac{8}{14}$$

$$P\text{ (pájaro celeste)} = \frac{6}{13}$$

$$\begin{aligned} P(\text{amarillo}) \text{ y } P(\text{celeste}) &= P(\text{amarillo}) \cdot P(\text{celeste/amarillo}) \\ &= \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{13} \\ &= \frac{24}{91} \end{aligned}$$

Pregunta oficial PSU

56. Del triángulo de Pascal de la figura 17 se puede inferir el número total de los posibles resultados que se obtienen al lanzar una moneda hasta seis veces, en forma aleatoria. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdaderas?

I) De la fila 1 2 1 se deduce que, si la moneda se lanza dos veces, teóricamente sólo en dos de los posibles resultados se obtiene una cara y un sello.

II) De la fila 1 3 3 1 se deduce que, si la moneda se lanza tres veces, teóricamente solo se pueden obtener ocho posibles resultados distintos.

III) De la fila 1 6 15 20 15 6 1 se deduce que, si la moneda se lanza seis veces, teóricamente en quince de los resultados posibles se obtiene cuatro caras y dos sellos.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

fig. 17

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

ALTERNATIVA CORRECTA

E

*Fuente : **DEMRE - U. DE CHILE**, Proceso de admisión 2011.*

Síntesis de la clase

Probabilidades

PROBABILIDAD TOTAL

- Mutuamente Excluyentes

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- NO Mutuamente Excluyentes

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

PROBABILIDAD COMPUESTA

- Independientes

  $P(A) \cdot P(B)$

- Dependientes

  $P(A) \cdot P(B/A)$