Clase

Combinatoria y probabilidad clásica

Aprendizajes esperados

- Aplicar el concepto de factorial en los ejercicios de combinatoria.
- Aplicar el concepto de probabilidad.
- Resolver problemas que involucren probabilidad clásica.

Pregunta oficial PSU

63. En una fila de 7 sillas se sientan cuatro mujeres y tres hombres, ¿de cuántas maneras se pueden sentar ordenadamente, si las mujeres deben estar juntas y los hombres también?

A) 2
B) $4 \cdot 3$
C) $3! \cdot 4! \cdot 2$
D) $3! \cdot 4!$
E) $4 \cdot 3 \cdot 2$

*Fuente : **DEMRE - U. DE CHILE**, Proceso de admisión 2013.*

1. Combinatoria
2. Probabilidades

1. Combinatoria

1.1 Principio multiplicativo

Se tienen los elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ que pueden ser elegidos de $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ formas distintas.

Por lo tanto, si se quieren elegir todos los elementos, entonces se pueden escoger de $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n$ maneras diferentes.

Ejemplo: ¿Cuántos números impares de tres cifras se pueden formar usando los números 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 9, si estos no pueden repetirse?

5 **6** **4**

Para que el número sea impar se tienen 4 opciones el {1, 5, 7, 9}

En total hay 7 números. Como ya se ocupó uno en la última cifra solo quedan 6 opciones.

En total hay 7 números. Si ya se ocuparon dos, solo quedan 5 opciones.

Por lo tanto, se pueden formar **5 · 6 · 4 = 120 números.**

1. Combinatoria

1.2 Permutación

Factorial de ***n* = *n* !**
Ejemplo: 6 ! = 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1

	Sin repetición	**Con repetición**
Definición	Grupos que se forman con ***n*** elementos a la vez. Se diferencian en el orden de estos elementos.	Grupos de ***n*** elementos que se repiten ***a, b,…,r*** veces.
Fórmula	$P_n = n!$	$P_r^{\,n} = \dfrac{n!}{a!\cdot b!\cdot \ldots \cdot r!}$
Ejemplo	¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una fila a 4 personas? $P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$	¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una línea 5 banderas de las cuales 3 son blancas y 2 son azules? $P_{2,3}^{\,5} = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 1\cdot 3!} = 10$

1. Combinatoria

1.3 Variación

	Sin repetición	Con repetición
Definición	Grupos con ***k*** elementos que se forman con los ***n*** elementos que se tienen. **Influye el orden de sus componentes.**	Misma definición anterior, pero en este caso los elementos se pueden repetir.
Fórmula	$V_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$V_{k,k}^n = n^k$
Ejemplo	¿De cuántas formas se puede elegir un presidente, un secretario y un tesorero dentro de un grupo de 10 personas? $V_3^{10} = \dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!} = 720$	¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con los primeros 6 números naturales? $V_{3,3}^6 = 6^3 = 216$

1. Combinatoria

1.4 Combinación

	Sin repetición	Con repetición
Definición	Grupos con ***k*** elementos que se forman con los ***n*** elementos que se tienen. **No influye el orden de sus componentes.**	Misma definición anterior, pero en este caso los elementos se pueden repetir.
Fórmula	$C_k^{\,n} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$	$C_{(k,k)}^{\,n} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$
Ejemplo	¿De cuántas maneras se pueden sentar 8 personas si hay 5 asientos disponibles? $C_5^{\,8} = \frac{8!}{5!\cdot(8-5)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 56$	Hay 4 tipos diferentes de botellas en una bodega. ¿De cuántas formas se pueden elegir 3 de ellas? $C_{(3,3)}^{\,4} = \frac{6!}{3!\cdot(4-1)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 20$

2. Probabilidades

2.1 Definiciones

El concepto de **probabilidad** se encuentra con frecuencia en la comunicación entre las personas. Por ejemplo:

1) Pilar y Álvaro tienen un 27% de probabilidades de ganarse un viaje al extranjero.

2) Los alumnos de Cpech tienen un 95% de probabilidades de ingresar a la universidad.

En los ejemplos, se da una **medida** de la ocurrencia de una situación que es incierta (ganarse un viaje o ingresar a la universidad), y esta se expresa mediante un número.

2.1.1 Experimentos aleatorios

Representan aquellas situaciones en las cuales podemos conocer todas las posibilidades de resultados que ocurrirán, pero no cuál es el resultado exacto que va a ocurrir.

2.1.2 Espacio muestral

Es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Ejemplo:

Al lanzar un dado de seis caras, el espacio muestral es : E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Ejemplo:

¿Cuántos elementos tiene el **espacio muestral** si se lanza una moneda y un dado de seis caras?

Usamos el principio multiplicativo:
Moneda: 2 posibilidades
Dado: 6 posibilidades

$2 \cdot 6 = 12$ elementos

Cuando un experimento tiene ***a*** resultados y se repite ***n*** veces, el espacio muestral tiene a^n elementos.

2. Probabilidades

2.1.3 Evento o suceso

Corresponde a un subconjunto del espacio muestral, determinado por una condición establecida.

Ejemplo:

Al lanzar dos monedas, que salgan solo dos caras; el evento determinado es:

A = Que salgan dos caras.

> Los sucesos se designan con letras mayúsculas.

Ejemplo:

En el lanzamiento de un dado, ¿cuántos elementos tiene el espacio muestral y cuántos el suceso “que salga un número par”?

Espacio muestral : 6 elementos.

Suceso B = que salga un número par : 3 elementos

2. Probabilidades

2.2 Probabilidad clásica

Está íntimamente ligada al concepto de azar y ayuda a comprender las posibilidades de los resultados de un experimento.

Intuitivamente podemos observar que cuanto más probable es que ocurra el evento, su medida de ocurrencia estará más próximo a “1” o al 100%, y cuando menos probable, más se aproximará a “0”.

Si **A** representa un evento o suceso, se cumple que:

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1} \quad \text{o} \quad \boxed{0\% \leq P(A) \leq 100\%}$$

2. Probabilidades

2.2.1 Regla de Laplace

Una probabilidad se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

Casos favorables → cardinalidad del evento o suceso.

Casos posibles → cardinalidad del espacio muestral.

Ejemplo:

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número primo?

Solución:

El espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, por lo tanto los casos posibles son 6.

Sea el evento o suceso A = que salga un número primo, entonces A = {2, 3, 5}, por lo tanto los casos favorables son 3.

Luego:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2.2.2 Tipos de sucesos

Suceso imposible

Si se tiene certeza absoluta de que un evento A **NO** ocurrirá:

$$P(A) = 0$$

Ejemplo:

La probabilidad de obtener un número mayor que 6 al lanzar un dado común es 0 (0 de 6).

Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6)

Casos favorables: 0

$$P(\text{mayor que } 6) = \frac{0}{6} = 0$$

2. Probabilidades

2.2.2 Tipos de sucesos

Suceso seguro

Si se tiene certeza absoluta de que un evento A ocurrirá:

$$P(A) = 1$$

Ejemplo:

La probabilidad de obtener un número natural al lanzar un dado común es 1 (6 de 6).

Casos posibles: 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6)

Casos favorables: 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6)

$$P(\text{natural}) = \frac{6}{6} = 1$$

2.2.2 Tipos de sucesos

Suceso contrario

La probabilidad de que un suceso NO ocurra, o probabilidad de un suceso contrario, se obtiene a través de:

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

Ejemplo:

Si la probabilidad de que llueva es $\frac{2}{5}$, ¿cuál es la probabilidad de que **NO** llueva?

Solución:

$$P(\text{no llueva}) = 1 - P(\text{llueva})$$

$$P(\text{no llueva}) = 1 - \frac{2}{5}$$

$$P(\text{no llueva}) = \frac{3}{5}$$

2. Probabilidades

2.3 Ley de los grandes números

Cuando todos los resultados de un experimento son equiprobables (tienen la misma probabilidad de ocurrir), se pueden establecer algunas conclusiones relacionando la probabilidad con la frecuencia absoluta de cada evento.

Por ejemplo, Mariela lanzó un dado 100 veces y registró los resultados en la siguiente tabla:

Nº	**Cantidad de veces que salió**	**Frecuencia absoluta**
1	15	0,15
2	17	0,17
3	20	0, 20
4	19	0,19
5	13	0,13
6	16	0,16
	100	

2. Probabilidades

2.3 Ley de los grandes números

Luego, volvió a lanzar pero 1.000 veces el mismo dado y agregó los datos en una nueva tabla:

Nº	Cantidad de veces que salió	Frecuencia absoluta
1	158	0,158
2	161	0,161
3	168	0, 168
4	165	0,165
5	176	0,176
6	172	0,172
	1.000	

¿Es posible establecer alguna relación entre las tablas y la probabilidad de que salga un 2?

2. Probabilidades

2.3 Ley de los grandes números

La probabilidad de que salga un 2 al lanzar un dado es:

$P(2) = \frac{1}{6}$, que es equivalente a decir $P(2) = 0{,}16666\ldots$

En la primera tabla la frecuencia absoluta del número 2, es 0,17
En la segunda tabla la frecuencia absoluta del número 2, es 0,161

Nº	**Cantidad de veces que salió**	**Frecuencia absoluta**
2	17	0,17
	100	

Nº	**Cantidad de veces que salió**	**Frecuencia absoluta**
2	161	0,161
	1.000	

Si comparamos los resultados obtenidos con la probabilidad que salga el número 2, se puede concluir que a mayor cantidad de repeticiones del experimento, este siempre tenderá a la probabilidad calculada a priori.

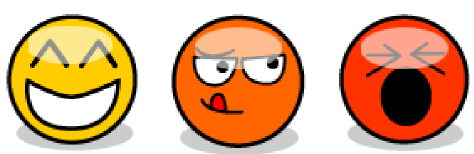
Pregunta oficial PSU

63. En una fila de 7 sillas se sientan cuatro mujeres y tres hombres, ¿de cuántas maneras se pueden sentar ordenadamente, si las mujeres deben estar juntas y los hombres también?

A) 2
B) $4 \cdot 3$
C) $3\,! \cdot 4\,! \cdot 2$
D) $3\,! \cdot 4\,!$
E) $4 \cdot 3 \cdot 2$

ALTERNATIVA CORRECTA

C



*Fuente : **DEMRE - U. DE CHILE**, Proceso de admisión 2013.*

Síntesis de la clase